APLICACIONES LINEALES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES (DIMENSIÓN FINITA)

Trabajaremos ahora con e.v. de dimensión finita y estudiaremos las aplicaciones definidas entre ellos que conservan la estructura del espacio vectorial.

Definición: Sean V y W dos e.v. sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ de dimensiones respectivas n y m. Una aplicación $f: V \longrightarrow W$ entre los e.v. V y W (como conjuntos) se dice una aplicación lineal precisamente si conserva la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector. Es decir:

i) Para todo par v_1, v_2 de vectores en V, $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

ii) Para todo escalar $\alpha \in K$ y vector $v \in V$, $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$

Equivalentemente, $f: V \longrightarrow W$ se dice lineal $:\Longleftrightarrow$ Para todo par de vectores v_1, v_2 en V y todo par de escalares α, β, $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Ejemplos: Habitualmente trabajaremos con los e.v. consistentes en $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y aplicaciones $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Veamos algunos ejemplos de aplicaciones lineales.

1) Las aplicaciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = \lambda \cdot x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, son lineales (obsérvese que no lo es una aplicación definida por $g(x) = \lambda x + \mu$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ salvo que $\mu = 0$)

2) Para cada $i = 1..n$, las aplicaciones

$$f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times .. \mathbb{R}_i \times .. \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_i(\cdot(x)) = (0..(x)_i ... 0)$$

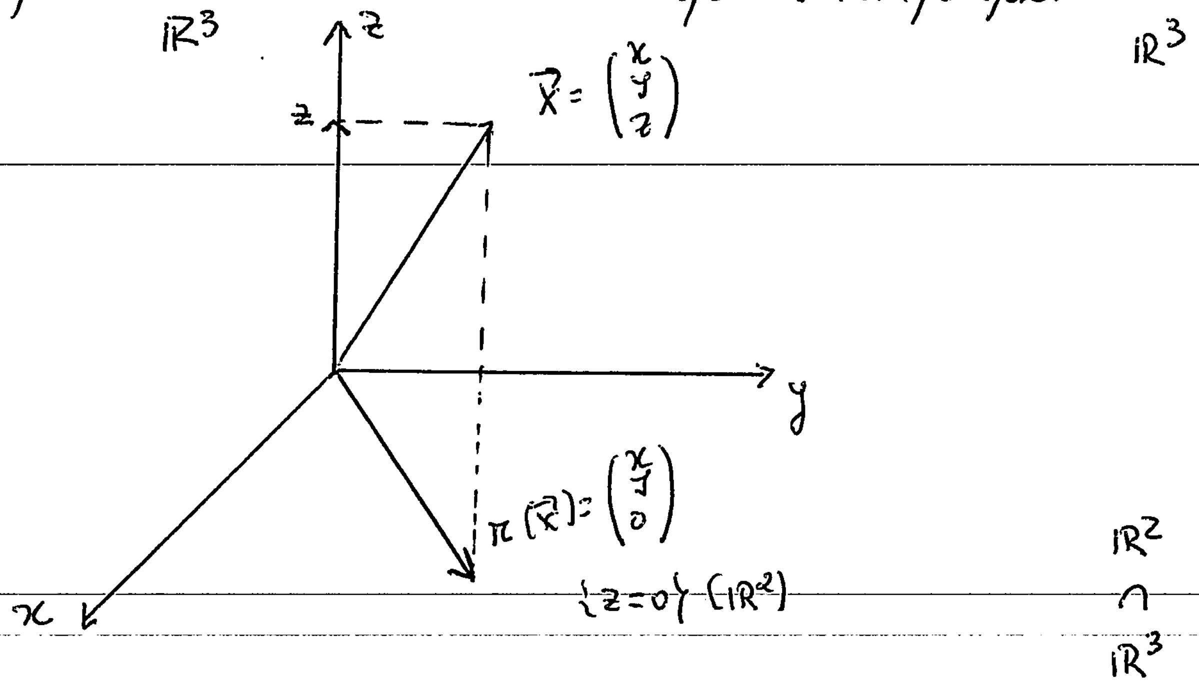
son lineales

y también lo son las definidas por

$$\pi_j : \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R}_j \times .. \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{X} = (x_1 ... x_j ... x_n) \longmapsto \pi_j(\vec{x}) = x_j$$

Las f_i se denominan inmersiones o inyecciones canónicas y las π_j proyecciones canónicas

3) Son lineales las proyecciones geométricas según una dirección de un espacio $\mathbb{R}^n$ en otro de dimensión inferior. Por ejemplo:



Esta aplicación se describe formalmente así:

$$\pi:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \pi(\vec{X})=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

Nótese que el conjunto imagen de esta aplicación $\mathrm{Im}(\pi)$ es el subespacio $\mathbb{R}^2$ de ecuación $z=0$. Nótese también que en esta aplicación hay un subespacio en el e.v. de partida que se aplica en el vector $\vec{0}$ y es el definido por las ecuaciones $\{x=0;\ y=0\}$

4) Son lineales las aplicaciones $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$: $f\equiv(f_1,\dots f_m)$ cuyas componentes corresponden a polinomios lineales homogéneos en las variables x_i. Por ejemplo:

$$f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2)=(x_1+x_2;\ x_2,\ x_2-x_1)$$

5) Para considerar un ejemplo no trivial sea $\mathbb{R}[x]$ el e.v. de los polinomios en una variable y consideremos

$$f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}}{P(x)} \longmapsto f(P(x)) = P'(x) = \frac{d}{dx}P(x) = \\ = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

esta no es otra que la aplicación derivar con respecto de x.
¿Quién es la imagen de esta aplicación? ¿Qué subespacios se aplican en el polinomio cero?

PROPIEDADES:

1.- La composición de aplicaciones lineales $f: V \longrightarrow W$; $g: W \longrightarrow T$ es una aplicación lineal $g\circ f: V \longrightarrow T$. En efecto.

$$(g\circ f)(\alpha v_1+\beta v_2) := g[f(\alpha v_1+\beta v_2)] \underset{\overset{\uparrow}{f \text{ lineal}}}{=} g[\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)] \underset{\overset{\uparrow}{g \text{ lineal}}}{=}$$

$$= \alpha\, g[f(v_1)] + \beta\, g[f(v_2)] \underset{\overset{\uparrow}{\text{def de}(g\circ f)}}{=} \alpha (g\circ f)(v_1) + \beta (g\circ f)(v_2)$$

2.- En una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$ se tiene: $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$; $f(-v) = -f(v)$
En efecto: Para $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, por la unicidad del neutro basta probar que $f(\vec{0}_V)$ verifica la propiedad del neutro. Antes de nada, es inmediato que $\text{Im}(f) = \{w \in W \text{ t.q. existe } v \in V;\ f(v) = w\} \subset W$ es un subespacio, con lo cual basta comprobar que $f(\vec{0}_V)$ verifica la propiedad del elemento neutro en los elementos que son imagen. Ahora bien:

$$f(\vec{0}_V) + f(v) \underset{\overset{\uparrow}{\text{linealidad}}}{=} f(\vec{0}_V + v) \underset{\overset{\uparrow}{\vec{0}_V \text{ neutro}}}{=} f(v)$$ y como $\text{Im}(f)$ es un subespacio

$$f(\vec{0}_V) + f(v) - f(v) = f(v) - f(v) = \vec{0}_W$$ y así $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Ahora tenemos: Para cada $v \in V$; $\vec{0}_W = f(\vec{0}_V) = f(v + (-v)) =$
$= f(v) + f(-v)$ y así; $f(-v) = -f(v)$

3.- En particular, como $f(\vec{0}_V)=\vec{0}_W$, tenemos que el siguiente conjunto en V es no vacío:

$Ker(f) := \{ v\in V \text{ t.q. } f(v)=\vec{0}_W \} \ni \vec{0}_V$.

Usando la caracterización de subespacios se ve inmediatamente que $Ker(f)\subset V$ es un subespacio vectorial

4.- Sea $f:V\longrightarrow W$ una aplicación lineal, entonces:

4.1.- si $\{v_1 .. v_k\}$ son linealmente dependientes, entonces $\{f(v_1) .. f(v_k)\}$ también son dependientes.

En efecto, existen escalares λ_i no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i=\vec{0}_V$.
Usando la linealidad:
$\vec{0}_W=f(\vec{0}_V)=f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(v_i)$. Pero algún λ_i es no nulo y así

$\{f(v_1) .. f(v_k)\}$ son linealmente dependientes

Equivalentemente:

4.2.- Sean $\{v_1 .. v_k\}\subset V$ vectores tales que $\{f(v_1) .. f(v_k)\}$ son linealmente independientes; entonces $\{v_1 .. v_k\}$ también lo son.

5.- Sea $f:V\longrightarrow W$ aplicación lineal. Si $\{v_1 .. v_k\}$ generan V, entonces $\{f(v_1) .. f(v_k)\}$ generan $Im(f)$. En efecto:
Supongamos $<v_1 .. v_k>=V$ y sea $w\in Im(f)$. Existe $v\in V$ tal que $f(v)=w$. Sean $\lambda_1 .. \lambda_k$ tales que $v=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i$; entonces $w=f(v)=f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(v_i)$ y así vemos que $<f(v_1) .. f(v_k)> = Im(f)$.

6.- El siguiente resultado es importante: sea $f:V\longrightarrow W$ lineal

f es inyectiva $\iff$ $ker(f)=\vec{0}_V$

$\Rightarrow$ Si f es inyectiva, y v_1 y v_2 son tales que $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$. Ahora bien, siempre $\vec{0}_V \in Ker(f)$; por tanto, si $f(v) = \vec{0}_W = f(\vec{0}_V)$ necesariamente $v = \vec{0}_V$ y $Ker(f) = \vec{0}_V$

$\Leftarrow$ Sean v_1 y v_2 tales que $f(v_1) = f(v_2)$; entonces $f(v_1) - f(v_2) =$ $= f(v_1 - v_2) = \vec{0}_W$ y por tanto $v_1 - v_2 \in Ker(f) = \vec{0}_V$; luego $v_1 = v_2$ y f es inyectiva

7.- f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ la imagen de vectores $\{v_1 .. v_k\}$ linealmente independientes, son vectores independientes

$\Rightarrow$ Sean $\{v_1 .. v_k\}$ independientes y sea $Ker(f) = \vec{0}_V$. Si consideramos $\lambda_1 f(v_1) + .. + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}_W$; entonces $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \vec{0}_W$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in Ker(f) = \vec{0}_V$, con lo cual $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0}_V$ y siendo $\{v_1 .. v_k\}$ independientes, $\lambda_i = 0$ para todo i

$\Leftarrow$ Si $v \in Ker(f)$; $f(v) = \vec{0}_W$. Si $v \neq \vec{0}_V$; entonces $\{v\}$ es linealmente independiente; por hipótesis $f(v)$ es un vector linealmente independiente y necesariamente debe ser no nulo; así pues, como $f(v) = \vec{0}_W$, necesariamente $\vec{v} = \vec{0}_V$ y f es inyectiva.

8.- Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Si $\{v_1 .. v_k\}$ es un conjunto de generadores de V; entonces $\{f(v_1) .. f(v_k)\}$ es un conjunto de generadores de $Im(f) = f(V) \subset W$

<u>En efecto:</u> Esta propiedad es la 5, está repetida

⇒ Si f es inyectiva, y v_1 y v_2 son tales que $f(v_1)=f(v_2) \Rightarrow v_1=v_2$. Ahora bien, siempre $\vec{0}_V \in Ker(f)$; por tanto, si $f(v)=\vec{0}_W=f(\vec{0}_V)$ necesariamente $v=\vec{0}_V$ y $Ker(f)=\vec{0}_V$

⇐ Sean v_1 y v_2 tales que $f(v_1)=f(v_2)$; entonces $f(v_1)-f(v_2)=$
$= f(v_1-v_2)=\vec{0}_W$ y por tanto $v_1-v_2 \in Ker(f)=\vec{0}_V$, luego $v_1=v_2$ y f es inyectiva

7.- f es inyectiva ⟺ la imagen de vectores $\{v_1 .. v_k\}$ linealmente independientes, son vectores independientes

⇒ Sean $\{v_1 .. v_k\}$ independientes y sea $Ker(f)=\vec{0}_V$. Si consideramos $\lambda_1 f(v_1)+..+\lambda_k f(v_k)=\vec{0}_W$; entonces $f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i)=\vec{0}_W$ y $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i \in Ker(f)=\vec{0}_V$, con lo cual $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i=\vec{0}_V$ y siendo $\{v_1 .. v_k\}$ independientes, $\lambda_i=0$ para todo i

⇐ Si $v \in Ker(f)$; $f(v)=\vec{0}_W$. Si $v \neq \vec{0}_V$; entonces $\{v\}$ es linealmente independiente; Por hipótesis $f(v)$ es un vector linealmente independiente y necesariamente debe ser no nulo; así pues, como $f(v)=\vec{0}_W$, necesariamente $\vec{v}=\vec{0}_V$ y f es inyectiva.

DETERMINACIÓN DE UNA APLICACIÓN LINEAL: MATRIZ ASOCIADA

Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y supongamos dim $V = n$. Conocer f significa que para todo vector $v \in V$ conocemos su vector imagen $f(v) \in W$.

En particular, si conocemos f, conocemos el valor de f sobre los vectores de cualquier base $\{v_1 \dots v_n\}$ en V. Ahora bien, es suficiente conocer el comportamiento de f sobre una base de V, para conocer como funciona en cualquier vector. Esto es cierto porque todo vector $v \in V$ se expresa de modo único en función de una base y porque f es lineal.

Explícitamente. Sea $\{v_1 \dots v_n\}$ base de V y supongamos

$$
\begin{aligned}
f: V &\longrightarrow W \\
v_1 &\longmapsto f(v_1) = w_1 \\
v_2 &\longmapsto f(v_2) = w_2 \\
&\dots\dots\dots \\
v_n &\longmapsto f(v_n) = w_n
\end{aligned}
$$

Si $v \in V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$, existen escalares únicos tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Usando que f es lineal tenemos:

$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$ y f está determinada de modo único.

Obsérvese que en la base $\{v_1 \dots v_n\}$ cada vector v_i, $i=1..n$ tiene coordenadas $v_i = 0.v_1 + .. + 1.v_i + .. + 0.v_n$; por lo tanto:

cuando $v = v_i$; $f(v_i) = f(0.v_1 + . + 1.v_i + .. + 0.v_n) = 1.f(v_i)$

TEOREMA 1.- Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales $f: V \rightarrow W$ queda perfectamente determinada conociendo su valor sobre los vectores de una base de V

¿Cómo trabajar con una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$ entre dos e.v. de dimensiones respectivas $\dim V = n$ y $\dim W = m$?

Por la discusión y el teorema 1 previo, es claro que cuando definimos una aplicación lineal, estamos trabajando de antemano con una base en V en donde damos nombre a los vectores de V. Pero también estamos trabajando implícitamente con una base en el espacio de llegada W en donde los vectores imágenes se expresan con un nombre.

Por ejemplo: si consideramos la aplicación lineal:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_2 - x_1;\ x_2;\ x_1 + x_2)$$

El vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ está expresado directamente en la base canónica y así lo entendemos. Pero también lo está en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ el vector imagen:

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + (x_1 + x_1)\,\vec{e}_3$$

Por tanto, para describir una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$ necesitamos fijar de antemano dos bases: $\{v_1 .. v_n\}$ en V y $\{w_1 .. w_m\}$ en W. De este modo cada vector $v \in V$ se expresa en coordenadas $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y cada vector $w \in W$ se expresa en coordenadas $w = \sum_{j=1}^{m} y_j w_j$.

Veamos cómo expresar y trabajar analíticamente una aplicación lineal. Usamos que por el Teorema 1 previo f queda determinada de modo único conociendo su valor en los vectores de la base $\{v_1 .. v_n\} = B_1$. Para indicar que trabajamos en V con la base $B_1 = \{v_1 .. v_n\}$ y en W con la base $B_2 = \{w_1 .. w_m\}$ escribiremos:

$$f: (V, B_1) \longrightarrow (W, B_2)$$

Sea entonces:

$$f: (V, B_1) \longrightarrow (W, B_2)$$

$$v_1 \rightsquigarrow f(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{i1} w_i + \dots + \alpha_{m1} w_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} w_i$$

$$v_j \rightsquigarrow f(v_j) = \alpha_{1j} w_1 + \dots + \alpha_{ij} w_i + \dots + \alpha_{mj} w_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$$

$$v_n \rightsquigarrow f(v_n) = \alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{in} w_i + \dots + \alpha_{mn} w_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$$

Sea entonces: $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1} = x_1 v_1 + \dots + x_j v_j + \dots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$

Por linealidad tenemos:

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i\right] \underset{\uparrow}{=}$$

agrupamos coef. en cada w_i

$$\underset{\uparrow}{=} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1j}\right] w_1 + \dots + \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{ij}\right] w_i + \dots + \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{mj}\right] w_m$$

Es decir, explicitamos las coordenadas del vector imagen en la base B_2 y llamando por y_i las coordenadas del vector imagen en B_2; es decir:

$$f(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y_1 w_1 + \dots + y_i w_i + \dots + y_m w_m$$

tenemos:

$$f(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{B_2} \text{ en donde } \begin{aligned} y_1 &= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1j} = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1n} x_n \\ y_i &= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{ij} = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n \\ y_m &= \sum_{j=1}^{m} x_j \alpha_{mj} = \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \dots + \alpha_{mn} x_n . \end{aligned}$$

Matricialmente tenemos:

$$f(v)=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \overset{f(v_2)_{B_2}}{\alpha_{12}} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in}\\ \underbrace{\alpha_{m1}}_{f(v_1)_{B_2}} & \alpha_{m2} & \cdots & \underbrace{\alpha_{mj}}_{f(v_j)_{B_2}} & \cdots & \underbrace{\alpha_{mn}}_{f(v_n)_{B_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_{B_1}.$$

La matriz $(\alpha_{ij})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}$ es una matriz $m\times n$ cuyas columnas son las coordenadas en B_2 de las imágenes de los vectores de la base B_1.

Definición: Llamaremos a la matriz (α_{ij}) la matriz asociada a la aplicación lineal $f:(V,B_1)\longrightarrow(W,B_2)$ respecto de las bases $B_1=\{v_1..v_n\}$ y $B_2=\{w_1..w_m\}$. Explícitamente y escrita en columnas es la matriz que denotaremos como:

$$M_{B_1,B_2}(f)=\left(f(v_1)_{B_2}\,|\,f(v_2)_{B_2}\,|\ldots|\,f(v_j)_{B_2}\,|\ldots|\,f(v_n)_{B_2}\right)$$

Mediante esta matriz la expresión coordenada o analítica de f es como sigue:

$$f:(V,B_1)\longrightarrow(W,B_2)$$

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_{B_1}\longmapsto f(v)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}_{B_2}=M_{B_1,B_2}(f)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_{B_1}=$$

$$=\left(f(v_1)_{B_2}\,|\ldots|\,f(v_n)_{B_2}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_{B_1}$$

Veamos un ejemplo: sea la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_2 - x_1 ; x_2 ; x_1 + x_2)$$

Recordemos que los vectores son realmente columnas por lo que si somos precisos, la aplicación se escribe:

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Además, tanto en el e.v. de partida como en el de llegada, los vectores están expresados en la base canónica. Por tanto, calcularemos la matriz asociada respecto de dichas bases: $M_{\mathcal{B}}(f) = M$.

Claramente uno tiene la tentación de usar la propiedad de la matriz M que es una matriz 3×2 satisfaciendo:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Por lo que uno determina directamente las entradas de la matriz para obtener el resultado y así:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ninguna objeción a esto, pero debe quedar claro lo que uno hace: las columnas de la matriz M son las imágenes de la base canónica $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ en $\mathbb{R}^2$. En efecto:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{e_1}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{e_2}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir: $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) := M_{\mathcal{B}}(f) = (f(\vec{e_1}) / f(\vec{e_2})) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

IMÁGEN DIRECTA E IMAGEN RECÍPROCA DE SUBESPACIOS

Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y supongamos que $\dim V = n$; y $\dim W = m$.

Ya hemos visto que si $\{v_1 .. v_k\}$ generan V, entonces $\{f(v_1) .. f(v_k)\}$ generan la imagen de la aplicación $Im(f) = f(V)$.

Sea ahora $V_1 \subseteq V$ un subespacio. La inclusión es una aplicación lineal $V_1 \underset{i_{V_1}}{\subseteq} V$ tal que $v \in V_1 \mapsto i_{V_1}(v) := v \in V$. Si componemos una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$ con tal inclusión tenemos la restricción de la aplicación f al subespacio V_1:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ V_1 \arrow[u, phantom, "\cup\!\mid" description, "i_{V_1}"'] \arrow[ur, "f\circ i_{V_1} := f|_{V_1}"'] & \end{tikzcd}$$

En notación la composición de f con la inclusión i_{V_1} se denotará $f|_{V_1}$ y se lee f restringido al subespacio V_1.

Como $f \circ i_{V_1}$ es composición de aplicaciones lineales; ella es lineal y su imagen consiste en:

$$Im(f|_{V_1}) = Im(f \circ i_{V_1}) = \{w \in W \text{ t.q. existe } v \in V_1 \text{ tal que } f(v) = w\}$$
$$= \{f(v) \in W \text{ t.q. } v \in V_1\} =: f(V_1)$$

En particular: la imagen de un subespacio en V por una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$, es de nuevo un subespacio.

Con mayor generalidad podemos decir: Sean $\{v_1 .. v_r\} \subset V$ vectores en X; entonces, si f es una aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$

$$f(<v_1 .. v_r>) = <f(v_1) .. f(v_r)>$$

la imagen del subespacio que generan | es el subespacio generado por las imágenes

En efecto: $f(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i) \underset{\underset{\text{lineal}}{\uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(v_i)$, luego la igualdad es inmediata.

Consideremos ahora $f: V \longrightarrow W$ lineal y sea $W_1 \subset W$ un subespacio. Tomemos la imagen recíproca:

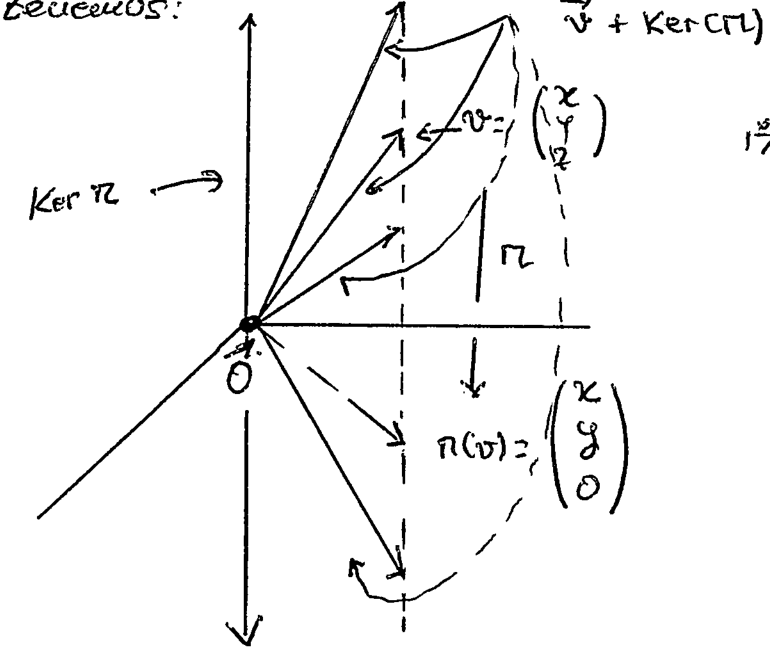
$f^{\leftarrow}(W_1) := \{ v \in V$ t.q. $f(v) \in W_1 \}$. Veamos que dicha imagen recíproca es un subespacio: Sean $v_1, v_2 \in f^{\leftarrow}(W_1)$ y α, β. Entonces $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$ y como $f(v_1), f(v_2)$ son de W_1 y éste es un subespacio vemos que $\alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \in W_1$; luego $\alpha v_1 + \beta v_2 \in f^{\leftarrow}(W_1)$.

Por ejemplo: $\vec{0}_W \in W$ es un subespacio y su imagen recíproca son los vectores del núcleo:

$$f^{\leftarrow}(0_W) = \{ v \in V \text{ t.q. } f(v) = \vec{0}_W \} = Ker(f)$$

Además: dado un subespacio $W_1 \subseteq W$; como $\vec{0}_W \in W_1$, es claro que $f^{\leftarrow}(W_1) \supseteq f^{\leftarrow}(\vec{0}_W) = Ker(f)$ es un subespacio conteniendo al núcleo.

OJO! : La imagen recíproca de un subconjunto que no es un subespacio no es un subespacio. De hecho, si $w \in W$ sabemos que $f^{\leftarrow}(w) \neq \emptyset \iff w \in Im(f)$. Pero en el caso que nos ocupa de ser f una aplicación lineal tenemos:



1º/ Si $v \in f^{\leftarrow}(w) \Rightarrow f(v) = w$

Ahora bien: $f(v) + \vec{0}_W = w + \vec{0}_w = w$

Sea $\bar{v} \in Ker(f)$, luego $f(\bar{v}) = \vec{0}_W$;

Entonces:

$f(v + \bar{v}) = f(v) + f(\bar{v}) = f(v) + \vec{0}_W = w$

luego

$$v + Ker(f) \subseteq f^{\leftarrow}(w)$$

Veamos que $f^{\leftarrow}(w) \subseteq v + Ker(f)$ en donde $f(v) = w$.

En efecto: sean dos cualesquiera v_1, v_2 en $f^{\leftarrow}(w)$; entonces $f(v_1) = w = f(v_2) \iff f(v_1 - v_2) = \vec{0}_W \iff v_1 - v_2 \in Ker(f) \iff v_1 = v_2 + \vec{v}$ con $\vec{v} \in Ker(f)$.

IMÁGENES RECÍPROCAS DE VECTORES Y SISTEMAS LINEALES

Para simplificar supongamos $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal referida a las bases canónicas y supongamos que $(a_{ij}) = (f(e_1) \cdots f(e_n))$ es la matriz asociada.

Analíticamente la expresión de f es así:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \iff A\vec{X} = \vec{Y}$$

Para un vector concreto $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, la ecuación matricial previa define un sistema lineal en las variables $x_1 \ldots x_n$, por lo que:

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in Im(f) \iff$ el sistema lineal def por la expresión coordenada de f es compatible

$\iff$ las soluciones de ese sistema lineal compatible son la imagen recíproca $f^{\leftarrow}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Por tanto:

$Ker(f) = f^{\leftarrow}(\vec{0}_W)$ son las soluciones de $A\vec{x} = \vec{0}$

Cuando $\vec{w} \in Im(f)$, $f^{\leftarrow}(w)$ son las soluciones del sistema lineal asociado al homogéneo previo: $A\vec{x} = \vec{w}$.

FÓRMULA DE LAS DIMENSIONES

El resultado que vamos estudiar a continuación se "resume en una fórmula" que relaciona las dimensiones del núcleo, imagen y espacio de partida de una aplicación lineal. Pero realmente dice mucho más. En primer lugar retomamos la propiedad 5:

5.- Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos e.v. con $\dim V = n$; $\dim W = m$. Sea $B = \{v_1 .. v_n\}$ una base de V. Sabemos que f queda perfectamente determinada conociendo las imágenes $f(v_1), .. f(v_n)$ en W. Como $\{v_1 .. v_n\}$ generan el espacio de partida V, entonces $\{f(v_1) .. f(v_n)\}$ generan la imagen $Im(f) = f(V) \subset W$.

Si consideramos que los $f(v_i)$ están expresados en una base $B' = \{w_1 .. w_m\}$ de W, la matriz asociada de f respecto de las bases $B = \{v_1 .. v_n\}$ en V y $B' = \{w_1 .. w_m\}$ en W tiene por columnas:

$$M_{B,B'}(f) = (f(v_1)_{B'} | .. | f(v_j)_{B'} | .. f(v_n)_{B'})$$

y las columnas de dicha matriz son un sistema de generadores de $Im(f)$. Podemos usar el método de Gauss para encontrar entre $\{f(v_j) \; 1 \leq j \leq n\}$ un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, una base de la imagen.

Claramente tenemos:

6.- Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal y $M := M_{B,B'}(f)$ es la matriz asociada respecto de dos bases dadas $B = \{v_1 .. v_n\}$ en V y $B' = \{w_1 .. w_m\}$ en W, entonces:

$$\dim Im(f) = \text{rango}(M_{B,B'}(f))$$

Dada $f: V \longrightarrow W$, lineal, podemos considerar bases muy particulares en V y en W que nos permiten relacionar $\dim V$; $\dim \operatorname{Ker}(f)$ y $\dim \operatorname{Im}(f)$.

PROPOSICIÓN: Si $f: V \longrightarrow W$ es lineal entonces $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

PRUEBA: ¡¡Esta demostración es lo verdaderamente importante de este resultado!!

Vamos a construir una base en V respecto de la cual la relación mencionada en la proposición sale de modo inmediato:
Sea $\{v_1 .. v_r\}$; $r = \dim \operatorname{Ker}(f)$ una base del núcleo de la aplicación y ampliemos dicha base del $\operatorname{Ker}(f)$ a una en el espacio total V que llamaremos: $B = \{v_1 .. v_r ; v_{r+1} .. v_n\}$. f queda perfectamente determinada conociendo las imágenes de los vectores en esta base y además, por la propiedad 5 - tales imágenes son un sistema generador de $\operatorname{Im}(f)$.
Es decir:

$$\begin{array}{llcll}
 & f: \quad V & \longrightarrow & W & \\
\operatorname{Ker}(f) & \left\{\begin{array}{l} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{array}\right. & \begin{array}{c} \longmapsto \\ \\ \longmapsto \end{array} & \begin{array}{l} f(v_1) = \vec{0} \\ \\ f(v_r) = \vec{0} \end{array} & \operatorname{Im}(f) = \langle f(v_{r+1}) \,.\,. f(v_n) \rangle \\
 & v_{r+1} & \longmapsto & f(v_{r+1}) & \\
 & \vdots & & & \\
 & v_n & \longmapsto & f(v_n) &
\end{array}$$

Vamos a probar que de hecho, $\{f(v_{r+1}) .. f(v_n)\}$ son linealmente independientes, con lo cual son una base de $\operatorname{Im}(f)$ y $\dim \operatorname{Im}(f) = n - r$
Así pues: $\dim V = n = r + (n-r) = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$
En efecto: Supongamos una c.l. $\alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + .. + \alpha_n f(v_n) = \vec{0}$.
Entonces por linealidad $f(\alpha_{r+1} \vec{v}_{r+1} + .. + \alpha_n \vec{v}_n) = \vec{0}$ y eso dice que $\alpha_{r+1} \vec{v}_{r+1} + .. + \alpha_n \vec{v}_n \in \operatorname{Ker}(f)$ con lo cual existen escalares $\beta_1 .. \beta_r$ tales que: $\alpha_{r+1} \vec{v}_{r+1} + .. + \alpha_n \vec{v}_n = \beta_1 \vec{v}_1 + .. + \beta_r \vec{v}_r$. Equivalentemente:
$-\beta_1 \vec{v}_1 - .. - \beta_r \vec{v}_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + .. + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ y siendo $\{\vec{v}_1 .. \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1} .. \vec{v}_n\}$

linealmente independientes, $\beta_1 = \dots = \beta_r = \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$, con lo cual $\{f(v_{r+1}) \dots f(v_n)\}$ son l.i y una base de $Im(f)$.

EN PARTICULAR NÓTESE QUE EN LA DEMOSTRACIÓN SE HA USADO EL ARGUMENTO SIGUIENTE:

Ampliando una base de $Ker(f)$ a una del espacio total, los restantes vectores forman un subespacio suplementario al $Ker(f)$; es decir:

$$V = \langle \vec{v}_1 .. \vec{v}_r ; \vec{v}_{r+1} .. \vec{v}_n \rangle = \langle \vec{v}_1 .. \vec{v}_r \rangle \oplus \langle \vec{v}_{r+1} .. \vec{v}_n \rangle =$$

$$= Ker(f) \oplus \underset{\overset{\shortparallel}{S}}{\langle \vec{v}_{r+1} .. \vec{v}_n \rangle}$$

y la aplicación restricción de f a cualquier tal suplementario de $Ker(f)$ es de hecho suyectiva teniendo como imagen, la imagen de la aplicación

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
Ker(f) \oplus S \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] & \\
\cup & \cup \\
S \arrow[r] \arrow[uuur, "f/_S"] & Im(f/_S) = Im(f)
\end{tikzcd}$$

TODAVÍA MÁS: Consideremos en V la base así construida $\overbrace{\{v_1 .. v_r, v_{r+1} . v_n\}}^{B}$ y como $\{w_1 := f(v_{r+1}); .. w_{n-r} := f(v_n)\}$ son linealmente independientes en el e.v. de llegada, ampliemos estos a una base $\underbrace{\{w_1 .. w_{n-r}, w_{n-r+1} .. w_m\}}_{B'}$ en W. Calculemos la matriz asociada a f respecto de estas bases B y B'

$$(V, B) \xrightarrow{\quad f \quad} (W, B')$$

$$(1, 0 \dots 0)_B = v_1 \rightsquigarrow f(\vec{v}_1) = \vec{0} = (0 .. \overset{m}{} 0)_{B'}$$

$$\vdots$$

$$(0 \dots 1_r \dots 0)_B = v_r \rightsquigarrow f(\vec{v}_r) = \vec{0}$$

$$(0 \dots 1_{r+1} 0)_B = v_{r+1} \rightsquigarrow f(\vec{v}_{r+1}) = w_1 = (1, 0 \dots 0)_{B'}$$

$$\vdots$$

$$(0 \dots , 1_n)_B = v_n \rightsquigarrow f(\vec{v}_n) = w_{n-r} = (0 \dots 1_{n-r} \dots 0)_{B'}$$

Vemos que la matriz asociada respecto de estas bases es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{rcccccccl}
 & & r & & & & n & & \\
 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \left.\right\} r \text{ filas} & \\
 & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \\
r \rightarrow & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\
r+1 \rightarrow & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 0 & & \leftarrow r+2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \left.\right\} n-r \text{ filas} & \\
 & \uparrow & \uparrow & \nwarrow & & & & & \\
 & f(v_1) & f(v_r) & \underbrace{f(v_{r+1}) \quad\quad\quad}_{n-r \text{ columnas}} & & & & &
\end{array}\right)$$

Es decir, la matriz es de la forma (por bloques)

$$\left(\begin{array}{r|ccc|ccccc}
 & 1 & & r & & & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\
 & \vdots & & & & & & & \\
r \rightarrow & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
\hline
 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\
 & \vdots & & & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \left.\right\} n-r \text{ filas} \end{array}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{n-r \text{ columnas}}$$

O más brevemente:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$$

siendo

$$I_{n-r} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz identidad.

RELACIÓN ENTRE LAS DIFERENTES MATRICES ASOCIADAS A UNA APLICACIÓN LINEAL: MATRICES EQUIVALENTES. CAMBIO DE BASE

Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, ya hemos visto que:

1.- f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow$ la imagen de un conjunto de vectores linealmente independientes, es necesariamente linealmente independiente

2.- f es sobre $\Longleftrightarrow$ $Im(f) = W$ $\Longleftrightarrow$ el rango de cualquier matriz asociada a f respecto de bases B_1 en V y B_2 en W coincide con la dimensión del espacio de llegada W.

Consideremos ahora $f: V \longrightarrow W$ lineal y biunívoca. Esta aplicación es muy interesante y es lo que denominaremos un isomorfismo. Por ser aplicación sin más, identifica ambos conjuntos elemento a elemento; pero siendo además lineal, identifica las estructuras.

EJERCICIO: Sea $f: V \longrightarrow W$ lineal y biunívoca y sea $f^{-1}: W \longrightarrow V$ la aplicación inversa; entonces f^{-1} también f^{-1} es una aplicación lineal

EJERCICIO: Sean dos aplicaciones lineales: $f: V \longrightarrow W$ y $g: W \longrightarrow T$ y consideremos la composición $g \circ f: V \longrightarrow W \longrightarrow T$. Entonces las matrices asociadas respecto de bases B_1 en V; B_2 en W y B_3 en T satisfacen la relación:

$$M(g \circ f) = M(g) \circ M(f)$$; en donde "$\circ$" indica el producto

de matrices. Si h: es la aplicación identidad $h(v) = v$, entonces la matriz asociada a $h: V \longrightarrow V$ en cualquier base es la matriz diagonal de 1's: $M(h) = I = diag(1 \dots 1)$. En particular, siendo $f: V \longrightarrow W$ un isomorfismo:

$$M(f \circ f^{-1}) = M(id_V)$$ y por tanto:

$$I = M(f) \circ M(f^{-1}) \quad y \quad M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$$

CAMBIO DE BASE : INTRODUCCIÓN

Sea V un e.v. cualquiera de dimensión $\underline{\underline{n}}$ sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Fijemos una base $\{\vec{v}_1 .. \vec{v}_n\}$. Cada vector $\vec{x} \in V$ posee unas coordenadas únicas en dicha base; es decir, existen escalares únicos $x_1 .. x_n$ tales que:

$$\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + \cdots + x_n \vec{v}_n$$

Fijemos ahora V con esta base $B = \{v_1 .. v_n\}$ para dar a los vectores en V un nombre según esta base B, y digamos que en (V, B) el vector $\vec{x}$ tiene coordenadas

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

Alternativamente consideremos el e.v. numérico K^n ($\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$) en donde un vector está expresado de manera natural en la base canónica $\mathcal{E} = \{e_i\}_i$ con $e_i = (0 .. 1_i .. 0)$.

La aplicación definida en la manera siguiente (pongo $K = \mathbb{R}$ para ilustrar)

$$\begin{tikzcd}
(V, B) \arrow[r, "\mathcal{B}"] & (\mathbb{R}^n, \mathcal{E}) \\
\vec{x} = \sum x_i v_i \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Esta aplicación es un isomorfismo que identifica V con $\mathbb{R}^n$ y la base $B = \{v_1 .. v_n\}$ con la base canónica $\mathcal{E} = \{e_1 .. e_n\}$. Esto último es debido al hecho importantísimo siguiente:

Si fijamos una base $B = \{v_1 .. v_n\}$ en un e.v. V de dimensión n, de manera que un vector $\vec{x} \in V$ tiene coordenadas $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$

Nótese que, en particular:

las coordenadas del primer vector v_1 en B son: $v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + .. + 0.v_n$; es decir: $v_1 = (1, 0 ... 0)$ y en general:

$$v_i = 0.v_1 + .. + 1.v_i + .. + 0.v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

Por tanto, fijada una base $B=\{v_1..v_n\}$ en un e.v. V, tomando coordenadas de los vectores en dicha base, podemos identificar V con $\mathbb{R}^n$ y el nombre de los vectores de V en base B coincide con el nombre de un vector de $\mathbb{R}^n$ en la base canónica.

Un Ejemplo: Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el e.v. de polinomios de grado ≤ 3. La base natural en este e.v. es la formada por las potencias de la variable x: $\{1, x, x^2, x^3\}$

Un polinomio es de la forma: $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ que podemos identificar con la 4-upla $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$. En esta identificación:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}_3[x], \{x^n\}_{n=0,1,2,3}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^4, E) \\
1 & \rightsquigarrow & (1; 0, 0, 0,) \\
x & \rightsquigarrow & (0, 1, 0, 0) \\
x^2 & \rightsquigarrow & (0, 0, 1, 0) \\
x^3 & \rightsquigarrow & (0, 0, 0, 1) \\
a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & \rightsquigarrow & (a_0, a_1, a_2, a_3)
\end{array}$$

Otro ejemplo: Consideremos las matrices cuadradas $n \times n$. Una tal matriz es un cuadro de $n \times n = n^2$ números (a_{ij}) $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq n$. Existen n^2 libertades o parámetros "a_{ij}" para especificar una matriz y llamando $E_{ij} = (\delta_{ij})$ la matriz que tiene un cero en el lugar $i \neq j$ y un 1 en el lugar $i = j$, encontramos que estas n^2 matrices son una base de dicho e.v; es decir,

$$M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{\text{matrices cuadradas } n \times n \ (a_{ij});\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

$$A = (a_{ij}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 \\ & 1_{ij} & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$\uparrow$$
$$i$$

La base $\{E_{ij}\}$ se dice la base natural (canónica!) en el e.v. de las matrices cuadradas $n\times n$ considerando las operaciones obvias:

Suma de matrices: $(a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})$ (sumar en el lugar (ij) correspondiente)

Producto por un escalar: $\alpha\cdot(a_{ij}) = (\alpha\cdot a_{ij})$ (multiplicar α en cada entrada de la matriz

Existe una identificación natural:

$$\begin{tikzcd} Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathbb{R}^{n^2} \\ E_{ij} \arrow[r, mapsto] & e_{ij} = (\ldots\ldots 1_{ij} \ldots 0) \end{tikzcd}$$

orden lexicográfico

$$(ij) \leq (k,l) \iff \begin{cases} i<k \\ \text{ó} \\ i=k,\ j\leq l \end{cases}$$

<u>Conclusión</u>: Dado un e.v. V de dimensión $\underline{\underline{n}}$ y fijada una base $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, .. \vec{v}_n\}$ en dicho espacio, existe un isomorfismo de espacios vectoriales $V \longrightarrow K^n$ en donde la base $\mathcal{B}$ se corresponde con la base canónica $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 .. \vec{e}_n\}$ del e.v. numérico K^n y un vector en V, sea $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i$, se corresponde con el vector n-upla $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ expresado en la base canónica de K^n

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overset{o}{i}_{\mathcal{B}}"] & K^n \\ \vec{v}_i \arrow[r, mapsto] & \vec{e}_i = (0 \ldots 1_i \ldots 0) \\ \vec{x} = \sum x_i \vec{v}_i \arrow[r, mapsto] & \vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

CAMBIO DE BASE EN UN ESPACIO VECTORIAL DADO

Sea ahora V un e.v. sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ de dimensión $\underline{\underline{n}}$ y consideremos en él dos bases $B_1 = \{\vec{v}_1 .. \vec{v}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{w}_1 .. \vec{w}_n\}$. Podemos trabajar a conveniencia con coordenadas bien en una base o en otra y de este modo diremos que trabajamos respectivamente en los e.v. coordenados (V, B_1) ó (V, B_2).

Denotemos por $\vec{X} = \sum x_i \vec{v}_i = (x_1 .. x_n)$ las coordenadas de un vector en (V, B_1) y por $\vec{Y} = \sum y_i \vec{w}_i (y_1 .. y_n)$ las coordenadas del mismo vector en (V, B_2).

La situación es obvia:

"El vector $\vec{X} = \vec{Y} \in V$ es el mismo; pero su nombre es diferente según que $\vec{X} \in (V, B_1)$ ó bien $\vec{Y} \in (V, B_2)$"

Por tanto estamos considerando esencialmente en el e.v. V la aplicación identidad que lleva un vector $v \in V$ en sí mismo. Pero, en el espacio coordenado (V, B_1) tal vector se llama $\vec{X}$ y en el espacio coordenado (V, B_2), tal vector se llama $\vec{Y}$.

Consideremos entonces la aplicación identidad entre ambos espacios vectoriales coordenados:

$$(V, B_1) \xrightarrow{id_{B_1 B_2}} (V, B_2)$$

$$\vec{v}_1 \rightsquigarrow (\vec{v}_1)_{B_2} = \alpha_{11}\vec{w}_1 + \alpha_{21}\vec{w}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\vec{w}_n$$

$$\vec{v}_j \rightsquigarrow \vec{v}_j\, B_2 = \alpha_{1j}\vec{w}_1 + \alpha_{2j}\vec{w}_2 + \ldots + \alpha_{nj}\vec{w}_n$$

$$\vec{v}_n \rightsquigarrow \vec{v}_n\, B_2 = \alpha_{1n}\vec{w}_1 + \alpha_{2n}\vec{w}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\vec{w}_n$$

Nótese que expresados en B_1, $\vec{v}_1 = (1, 0 \ldots 0)$; $\vec{v}_j = (0 \ldots 1_j \ldots 0)$ y $\vec{v}_n = (0 \ldots 1_n)$.

Esta aplicación es: 1º/ Claramente lineal; 2º/ es un isomorfismo porque lleva la base B_1 en la base B_2.

Analicemos cómo actúa: Sea $\vec{V} \in V$ pero con nombre $\vec{X} \in B_1$ e $\vec{Y} \in B_2$

Es decir:

Si $\vec{X} \in (V, B_1)$ sean $\vec{X} = \sum x_j \vec{v_j}$ las coordenadas del vector en la base B_1. Mediante $id_{B_1B_2}$, dicho vector se aplica en:

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{v_j} \rightsquigarrow id_{B_1B_1}(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, id_{B_1B_1}(\vec{v_j}) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\vec{v_j})_{B_2}$$

Entendamos esto: La expresión última $\sum_{j=1}^{n} x_j (\vec{v_j})_{B_2}$, expresa cada vector de la base B_1 en la base B_2

y por tanto, el resultado final es la expresión del vector $\vec{X}$ en dicha base B_2. Si llamamos $\vec{Y} = \sum y_i \vec{w_i}$ a las coordenadas del mismo vector $\vec{X}$ pero en la base B_2, tales coordenadas se relacionan con las coordenadas en B_1 en la manera siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (\vec{v_j})_{B_2} = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} d_{ij} \vec{w_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j d_{ij} \right) \vec{w_i}$$

Explícitamente si llamamos $\vec{Y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{w_i}$ a las coordenadas en B_2 tenemos

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j d_{1j} = x_1 d_{11} + x_2 d_{12} + \dots + x_n d_{1n}$$

$$\vdots$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j d_{ij} = x_1 d_{i1} + x_2 d_{i2} + \dots + x_n d_{in} \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j d_{nj} = x_1 d_{n1} + x_2 d_{n2} + \dots + x_n d_{nn}.$$

Matricialmente se escribe así:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{1j} \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{2j} \dots & d_{2n} \\ d_{i1} & d_{i2} \dots & d_{ij} \dots & d_{in} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{d_{n1}}_{\vec{v}_{1B_2}} & d_{n2} \dots & \underbrace{d_{nj}}_{\vec{v}_{jB_2}} \dots & \underbrace{d_{nn}}_{\vec{v}_{nB_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1} \qquad (2)$$

Coordenadas del vector $\vec{X}$ en B_1
$\Downarrow$
$\vec{V}$

Coordenadas del vector $\vec{Y}$
$\Downarrow$
$\vec{V}$

La matriz $(\vec{v}_{1\,B_2} | \ldots | \vec{v}_{j\,B_2} | \ldots | v_{n\,B_2})$ no es sino la matriz asociada a la aplicación identidad del e.v. V respecto de las bases B_1 en el espacio de partida (V, B_1) y B_2 en el espacio de llegada. Es decir:

$$M_{B_1,B_2}(id_{B_1 B_2}) = (\vec{v}_{1\,B_2} | \ldots | v_{j\,B_2} | \ldots | v_{n\,B_2})$$

La relación (1) previa a la expresión matricial (2) establece claramente lo que hace o cómo actúa esta matriz, (1) se re-escribe así:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_j \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \vec{Y} \\ \parallel \end{array} = x_1(\vec{v}_1)_{B_2} + x_2(\vec{v}_2)_{B_2} + \ldots + x_j(\vec{v}_j)_{B_2} + \ldots + x_n(\vec{v}_n)_{B_2}$$

vector $\vec{V}$ en coordenadas B_2

Es decir si $\vec{V} = \vec{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{v}_j$ son las coordenadas de un vector en la base $B_1 = \{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\}$ y expresamos las coordenadas de cada vector básico de esta base B_1 en la nueva base B_2: $\{(\vec{v}_1)_{B_2} \ldots (\vec{v}_j)_{B_2} \ldots (\vec{v}_n)_{B_n}\}$ el resultado son las coordenadas del vector $\vec{V}$ en la nueva base B_2

__Definición:__ En la situación previa, la matriz $(\vec{v}_{1\,B_2} | \ldots | \vec{v}_j|_{B_2} \ldots | v_{n\,B_2})$ es la matriz que cambia directamente un vector de coordenadas en la base $B_1 = \{\vec{v}_1 .. \vec{v}_n\}$ a la base $B_2 = \{\vec{w}_1 .. \vec{w}_n\}$. La denotaremos a partir de ahora por:

$$I_{B_1 B_2} = (\vec{v}_{1\,B_2} | \ldots | \vec{v}_{n\,B_2})$$

tiene por columnas las coordenadas de los vectores en B_1 expresados en B_2!

SITUACIÓN PARTICULARMENTE IMPORTANTE

Vamos a trabajar directamente en el e.v. numérico K^n y más concretamente en $\mathbb{R}^n$. Aquí todo vector viene expresado de manera natural en la base canónica $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1 .. \vec{e}_n\}$. Es decir: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$

Supongamos dado otra base:

$$B = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$$

Directamente los vectores $\vec{v}_1 .. \vec{v}_n$ vienen nombrados en la base canónica, por tanto la matriz formada con ellos por sus columnas según lo dicho anteriormente cambia de coordenadas en esa base B a las coordenadas canónicas. Es decir, tenemos:

$$(\mathbb{R}^n, B) \xrightarrow{id_{B,\mathcal{E}}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B \quad \begin{array}{lcl} v_1 & \rightsquigarrow & (v_1)_{\mathcal{E}} = v_{11}\vec{e}_1 + v_{21}\vec{e}_2 + \dots + v_{n1}\vec{e}_n \\ \dots\dots\dots & & \\ v_n & \rightsquigarrow & (v_n)_{\mathcal{E}} = v_{1n}\vec{e}_1 + v_{2n}\vec{e}_2 + \dots + v_{nn}\vec{e}_n \end{array} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

Así pues, llamando $J_{B\mathcal{E}}$ a la matriz asociada a esta identidad que cambia directamente de coordenadas en B a coordenadas en canónica tenemos:

$$J_{B,\mathcal{E}} \cdot \vec{Y}_B = \vec{X}_{\mathcal{E}}$$

Supongamos ahora una segunda base $B' = \{\vec{w}_1 \dots \vec{w}_n\}$ y llamemos $\vec{z}_{B'}$ a las coordenadas de un vector en esta nueva base. Al igual que antes tendremos:

$$J_{B'\mathcal{E}} . \vec{z}_{B'} = \vec{X}_{\mathcal{E}}$$

e igualando tenemos:

$$\vec{X}_{\mathcal{E}} = J_{B'\mathcal{E}}\, \vec{z}_{B'} = J_{B,\mathcal{E}}\, Y_B$$

Esta segunda igualdad es importante!

$$J_{B'\mathcal{E}},\ \vec{z}_{B'} = J_{B,\mathcal{E}}\, \vec{Y}_B \iff \begin{cases} J_{B,\mathcal{E}}^{-1} \cdot J_{B'\mathcal{E}} \cdot \vec{z}_{B'} = \vec{Y}_B \\ \text{ó bien} \\ \vec{z}_{B'} = J_{B'\mathcal{E}}^{-1}\, J_{B,\mathcal{E}} \cdot \vec{Y}_B \end{cases}$$

La matriz $J_{B,E}^{-1} \cdot J_{B'E}$ cambia directamente de coordenadas en B' a coordenadas en B. Dicho de otro modo: $J_{B,E}^{-1} = J_{E,B}$ y
$J_{B'B} = J_{BE}^{-1} \cdot J_{B'E} = J_{EB} \cdot J_{B'C} = M(i_{EB} \circ i_{B'C})$

Análogamente, la matriz $J_{B'C}^{-1} \circ J_{BC} = J_{C,B'} \cdot J_{BC} = M(i_{CB'} \circ i_{BC})$

MATRICES ASOCIADAS A UNA APLICACIÓN LINEAL: MATRICES EQUIVALENTES

En este tema o apartado quiero ser lo más concreto posible. Consideraremos que trabajamos con espacios numéricos $\mathbb{R}^n$ en donde de ordinario un vector viene expresado en la base canónica $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\}$ y de igual modo una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se entiende expresada respecto de las bases canónicas $\mathcal{E}_n = \{\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\}$ y $\mathcal{E}_m = \{\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_m\}$.

Supongamos alternativamente que en $\mathbb{R}^n$ tenemos una base adicional $B = \{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\}$ con la cual deseamos trabajar y análogamente otra base $B' = \{\vec{w}_1 \ldots \vec{w}_m\}$ en $\mathbb{R}^m$.

En tal caso debemos distinguir que tenemos una misma aplicación lineal f que puede ser expresada respecto de ESPACIOS VECTORIALES COORDENADOS distintos. Entenderemos esto con un diagrama sencillo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}) \arrow[r, "f_{\mathcal{E}\mathcal{E}}"] \arrow[dr, dashed, "f_{\mathcal{E},B'}"] & (\mathbb{R}^m, \mathcal{E}) \\
(\mathbb{R}^n, B) \arrow[ur, "f_{B,\mathcal{E}}"] \arrow[r, "f_{B,B'}"] & (\mathbb{R}^m, B')
\end{tikzcd}$$

Con $f_{\mathcal{E}}$ indicamos la aplicación f trabajando en base canónica.
Con $f_{B,\mathcal{E}}$ indicamos la MISMA aplicación f trabajando en base B en el espacio de partida que ahora se convierte en el espacio coordenado $(\mathbb{R}^n, B)$. Análogamente podemos considerar $f_{\mathcal{E},B'}$ trabajando en el espacio de llegada con el espacio coordenado $(\mathbb{R}^m, B')$.
La situación más general viene dada por $f_{B,B'}$ en donde la aplicación f se considera ahora desde el espacio coordenado $(\mathbb{R}^m, B)$ hasta el $(\mathbb{R}^m, B')$.

Vamos a trabajar analíticamente la situación más general: la relación matricial entre las representaciones de f en canónicas; es decir $f_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ y la de f en bases respectivas B y B'.

Como aplicación lineal entre los e.v. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, tal aplicación es la misma $f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \equiv f_{B,B'}$; pero coordenadamente no lo es ya que en $(\mathbb{R}^n, B)$ y $(\mathbb{R}^m, B')$ el nombre de los vectores está expresado en bases diferentes a la canónica.

Así pues: las matrices asociadas $M(f_{\mathcal{E}\mathcal{E}}) =: M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$ y $M(f_{BB'}) =: M_{B;B'}(f)$ son claramente distintas, PERO existe una relación entre ellas ya que el paso de los espacios coordenados:

$$\mathbb{R}^n, \mathcal{E} \xrightarrow{id_{\mathcal{E}B}} \mathbb{R}^n, B$$

y

$$\mathbb{R}^m, \mathcal{E} \xrightarrow{id_{\mathcal{E},B'}} \mathbb{R}^m, B'$$

son un cambio de base

Así pues nuestro diagrama previo podemos completarlo con dichos cambios de base y obtener un diagrama conmutativo de composición de aplicaciones lineales

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n) \arrow[r, "f_{\mathcal{E}\mathcal{E}}"'] & \mathbb{R}^m, \mathcal{E}_m \arrow[d, "id_{\mathcal{E}_m,B'} := (id_{B';\mathcal{E}})^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^n, B) \arrow[u, "id_{B;\mathcal{E}_n}"] \arrow[r, "f_{B;B'}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^m, B')
\end{tikzcd}$$

Se verifica: $f_{B,B'} = (id_{B';\mathcal{E}_m})^{-1} \circ f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \circ id_{B,\mathcal{E}_n}$

Tomando matrices asociadas:

$$M(f_{BB'}) = M(id_{B';\mathcal{E}_m})^{-1} \cdot M(f_{\mathcal{E}\mathcal{E}}) \cdot M(id_{B;\mathcal{E}_m})$$

Es decir

$$M(f_{B,B'}) = J_{B';\mathcal{E}_m}^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}(f) \cdot J_{B;\mathcal{E}_n}$$

Es importante observar que una matriz de cambio de base $J_{B,B'}$ es una matriz que posee inversa y que recíprocamente toda matriz P de orden nxn que sea una matriz inversible define una matriz de cambio de base ya que sus columnas son linealmente independientes y por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^n$

Teniendo en cuenta esto, consideremos en el conjunto de matrices nxn que sabemos es un grupo con la suma ordinaria, y de hecho en así consideremos las matrices inversibles, es decir:

$$Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \supset Gl(n,\mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } det(A) \neq 0\}$$

Considerando el producto ordinario de matrices, ahora $Gl(n,\mathbb{R})$ es un grupo en donde la matriz identidad es el elemento neutro y cada matriz P con $det \neq 0$ posee una inversa P^{-1} tal que $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I$
Más aún si P, Q son dos tales matrices también $P \cdot Q$ es inversible y $(P \cdot Q)^{-1} = Q^{-1} \cdot P^{-1}$
Pues bien, en el argumento anterior hemos visto que: si $M(f_{\mathcal{E}\mathcal{E}})$ y $M(f_{BB'})$ son matrices asociadas de una misma aplicación lineal, ambas matrices son equivalentes

<u>DEFINICIÓN:</u> Sea $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices nxn con coeficientes reales. Dos matrices A y B se dicen equivalentes precisamente si existen matrices inversibles P y Q tales que $A = PBQ \Leftrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = B$

<u>OBSERVACIONES:</u>

1.- Como el rango de una matriz coincide con la dimensión del subespacio imagen definido por la aplicación lineal definida por dicha matriz. Vemos que cualesquiera dos matrices equivalentes poseen el mismo rango.

2.- Más aún: si dos matrices nxn incluso poseen el mismo rango, entonces tales matrices son equivalentes

<u>NOTA</u>: Continuaré en un apéndice para curiosos!